This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

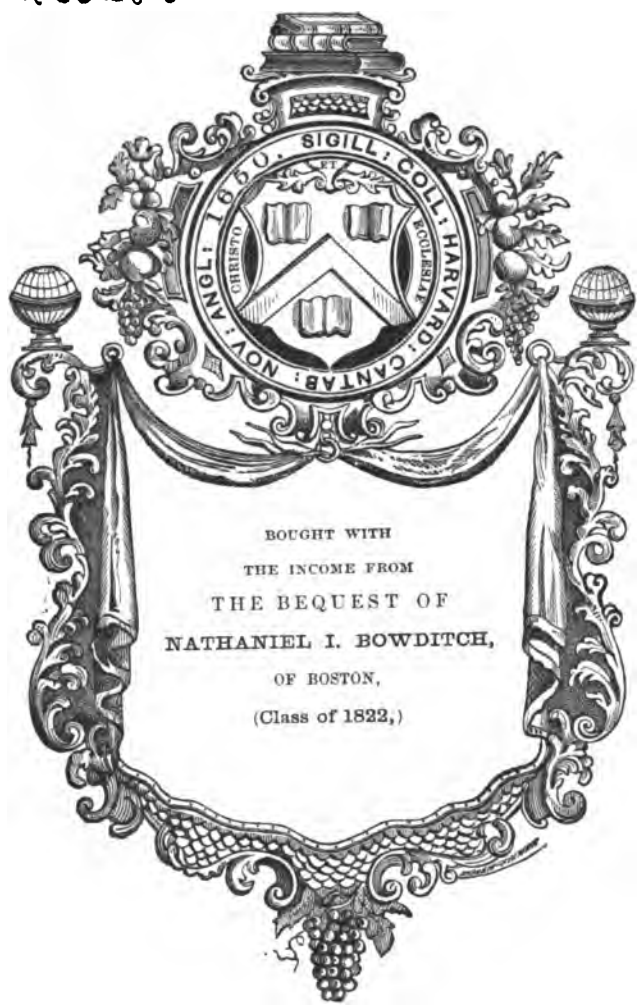
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3628.56



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

Ueber die

Function Π von Gauss

mit complexem Argument.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

von

Alfred Enneper.

Göttingen, 1856.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei.

(W. Fr. Kaestner.)

3628.56
Math. ~~4408.56~~

HARVARD COLLEGE
JUL 18 1904
LIBRARY.
Bowditch fund.

In den „Exercices du calcul intégral“ und dem „Traité des fonctions élliptiques“ hat Legendre eine Reihe merkwürdiger Integrale behandelt, die er nach ihrem Urheber die Eulerschen Integrale nannte. Der Ausgangspunkt der Untersuchung bildet das Integral

$$\int_0^\infty e^{-u} u^x \, du = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^x du$$

welches Legendre durch $\Gamma(x+1)$ bezeichnet. Die Eigenschaften dieser Function Γ werden entwickelt und gezeigt wie sich viele bestimmte Integrale und Reihen auf dieselbe reduciren lassen. Allgemeiner fasste Gauss sämmtliche Eigenschaften dieser Integrale zusammen, indem er die hypergeometrische Reihe zur Basis nahm und schliesslich auf eine Function $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$ kommt, deren Definition auf einfache Weise den Zusammenhang zwischen vielen unendlichen Reihen und Producten mit bestimmten Integralen zeigt. Die berühmte Abhandlung über diesen Gegenstand befindet sich in den „Commentationes societ. regiae Gotting. T. II. Im XV. Bande des Journals für Mathematik hatte Lejeune Dirichlett die glückliche Idee den Logarithmen der Function $\Gamma(x)$ unter der Form eines bestimmten Integrals darzustellen und so das Multiplicationstheorem von Gauss sehr einfach zu beweisen. In den folgenden Zeilen soll dieser von Dirichlet eingeschlagene Weg auf die Discussion der Function Γ oder Π mit complexem Argument angewendet werden. Es wird gezeigt, dass die Untersuchung dieser Function in Form eines bestimmten Integrals auf eine ganz ähnliche Definition wie die Gaussische für reelle Argumente führt und überhaupt, dass sich die Eigenschaften der genannten Functionen mit reellem Argument auch auf solche mit complexem Argument übertragen lassen. In der Bezeichnung sind wir dem grossen Göttinger Geometer gefolgt.

I.

Setzt man wie gewöhnlich $i = \sqrt{-1}$, so sei $\Pi(y+zi)$ durch die Gleichung

$$(1) \quad \Pi(y+zi) = \int_0^\infty e^{-u} u^{y+zi} \, du = \int_0^\infty e^{-u} u^y \left[\cos(z \log u) + i \sin(z \log u)\right] du$$

definirt. Für $y=o$ $z=o$ wird

$$(2) \qquad \Pi(o) = \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

Integrirt man

$$\int e^{-u} u^{y+1} [\cos(z \log u) + i \sin z \log u)] \, du$$

partiell nach e^{-u} so wird das Integral gleich

$$-e^{-u} u^{y+1} [\cos(z \log u) + i \sin(z \log u)] + (y+1+zi) \int e^{-u} u^{y} [\cos(z \log u) + i \sin(z \log u)] du$$

Nimmt man hierin successive $u=o$ $u=\infty$, so verschwindet der ausserhalb des Integralzeichens stehende Theil und man erhält

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{y+1+zi} dn = (y+1+zi) \int_0^\infty e^{-u} u^{y+zi} du$$

oder nach der obigen Bezeichnung (1)

$$(3) \qquad \Pi(y+1+zi) = (y+1+zi) \, \Pi(y+zi)$$

Dieses ist eine der Haupteigenschaften der Function Π, man findet leicht, wenn n eine ganze Zahl bedeutet

$$\Pi(y+n+zi) = (y+1+zi)(y+2+zi) \ldots (y+n+zi) \, \Pi(y+zi)$$

Setzt man hierin $y=o$ $z=o$ so ist wegen (2)

$$\Pi(n) = 1.2.3 \ldots n$$

eine bekannte Gleichung für ein beliebiges ganzes positives n.

Addirt man die Gleichung

$$v^{y+1} \int_0^\infty e^{-uv} u^{y} \cos(z \log u) du = \int_0^\infty e^{-u} u^{y} [\cos(z \log u) \cos(z \log v) + \sin(z \log u) \sin(z \log v)] du$$

zu

$$i v^{y+1} \int_0^\infty e^{-uv} u^{y} \sin(z \log u) du = \int_0^\infty e^{-u} u^{y} [\sin(z \log u) \cos(z \log v) - \cos(z \log u) \sin(z \log v)] du$$

so wird

$$v^{y+1} \int_0^\infty e^{-uv} u^{y} [\cos(z \log u) + i \sin(z \log u)] \, du =$$

$$[\cos(z \log v) - i \sin(z \log v)] \int_0^\infty e^{-u} u^{y} [\cos(z \log u) + i \sin(\log u)] \, du$$

oder nach der Bezeichnung in (1)

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-uv} u^{y+zi} du = v^{-(y+1+zi)} \Pi(z+zi)$$

Die Gleichungen (2–4) enthalten alles, was für das Folgende nöthig ist.

II.

Differentiirt man

$$\Pi[t\,(y+zi)] = \int_0^\infty e^{-v}\, v^{t(y+zi)}\, dv$$

nach t, so wird

$$\frac{1}{y+zi}\cdot\frac{d\,\Pi\,[t\,(y+zi)]}{dt} = \int_0^\infty e^{-v}\, v^{t(y+zi)}\cdot\log v\cdot dv.$$

Nun ist bekanntlich auch

$$\log v = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-uv}}{u}\, du$$

Dieses in die obige Gleichung gesetzt verwandelt die rechte Seite in

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-v}\, v^{t(y+zi)}\, \frac{e^{-u} - e^{-uv}}{u}\, du\, dv$$

Integrirt man in dem Doppel-Integral zuerst nach v, so reducirt sich dasselbe wegen (4) auf

$$\Pi\,[t(y+zi)] = \int_0^\infty \left\{ e^{-u} - \frac{1}{(1+u)^{1+t(y+zi)}} \right\} \frac{du}{u}$$

Die obige Gleichung geht also wegen

$$\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\log\varphi}{dt}$$

über in

$$(5)\qquad \frac{1}{y+zi}\,\frac{d}{dt}\log\Pi\,[t(y+zi)] = \int_0^\infty \left\{ e^{-u} - \frac{1}{(1+u)^{1+t(y+zi)}} \right\} \frac{du}{u}$$

Bezeichnet man mit Gauss $\left\{\frac{d\log\Pi(x)}{dx}\right\}_{x=o}$ durch $\psi\,(o)$ so ist

$$(6)\qquad \psi\,(o) = \int_0^\infty \left(e^{-u} - \frac{1}{1+u} \right) \frac{du}{u}$$

also wenn man diese Gleichung von (5) abzieht

$$\frac{1}{y+zi}\,\frac{d}{dt}\log\Pi\,[t\,(y+zi)] - \psi\,(o) = \int_0^\infty \left\{ 1 - (1+u)^{-t(y+zi)} \right\} \frac{du}{u\,(1+u)}$$

In dem Integral rechts nehme man u statt $\log(1+u)$ für Variabele, die vorstehende Gleichung wird dadurch

$$(7)\quad \frac{1}{y+zi}\frac{d}{dt}\log \Pi\,[t\,(y+zi)] = \psi\,(o) + \int_0^\infty \frac{1-e^{-ut(y+zi)}}{\frac{u}{e-1}}\,du$$

Dem Werth von $\psi\,(o)$ lässt sich leicht eine etwas veränderte Gestalt geben. Das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{\frac{-u}{e}}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

verschwindet für die beiden Grenzen, wie man leicht findet. Da die Function unter dem Integralzeichen für alle positiven Werthe von u endlich und continuirlich bleibt so ist die Summe aller Elemente des Integrals Null. Zieht man dasselbe von dem in, (5) gegebenen Werthe von $\psi\,(o)$ ab, so wird

$$(8)\qquad \psi\,(o) = \int_0^\infty \left(\frac{\frac{-u}{e}}{u} - \frac{1}{\frac{u}{e-1}}\right) du$$

Setzt man nun in (7) für $\psi\,(o)$ diesen Werth ein und vereinigt rechts die beiden Integrale, so wird

$$(9)\quad \frac{1}{y+zi}\frac{d\log \Pi\,[t\,(y+zi)]}{dt} = \int_0^\infty \left(\frac{\frac{-u}{e}}{u} + \frac{e^{-ut(y+zi)}}{\frac{u}{e-1}}\right) du$$

Diese Gleichung endlich nach t zwischen den Grenzen o und 1 integrirt gilt wegen $\Pi\,(o) = 1$

$$(10)\quad \log \Pi(y+zi) = \int_0^\infty \left\{(y+zi)e^{-u} - \frac{1-e^{-(y+zi)u}}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u}$$

$$= \int_0^\infty \left\{ye^{-u} - \frac{1-e^{-yu}\cos zu}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u} + i\int_0^\infty \left\{ze^{-u} - \frac{e^{-yu}\sin zu}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u}$$

III.

Der in (10) gegebene Ausdruck von $\log \Pi\,(y+zi)$ lässt sich leicht in einer convergenten Reihe darstellen. Bezeichnet man den reellen Theil durch P, so ist

$$P = \int^\infty \left\{ye^{-u} - \frac{1-e^{-yu}\cos zu}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u}$$

also

$$\frac{dP}{dy} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-yu}}{\frac{u}{e-1}} \cos zu \right\} du$$

Zieht man hiervon die Summe der beiden Gleichungen

$$\tfrac{1}{2} \log (y^2 + z^2) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-yu}}{u} \cos zu \, du$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{y}{y^2 + z^2} = \int_0^\infty \tfrac{1}{2} e^{-yu} \cos zu \, du$$

ab, so bleibt

$$\frac{dP}{dy} - \tfrac{1}{2} \left\{ \log(y^2+z^2) + \frac{y}{y^2+z^2} \right\} = -\int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) e^{-zu} \cos zu \, du$$

Integrirt man zwischen den Grenzen $y = o$ $y = y$ und berücksichtigt, dass für $y = o$

$$(P)_{y=o} = -\int_0^\infty \frac{1 - \cos zu}{\frac{u}{e-1}} \frac{du}{u} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \int_0^\infty e^{-su} \frac{1 - \cos zu}{u} du$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{s=o}^{s=\infty} \log \left(1 + \frac{z^2}{s^2} \right) = \tfrac{1}{2} \log \frac{2\pi z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$$

so wird

$$(11) \quad P = \tfrac{1}{2} \log \frac{2\pi}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} + \tfrac{1}{2} (y + \tfrac{1}{2}) \log (y^2 + z^2) - y + z \operatorname{arctang} \frac{y}{z}$$

$$+ \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) \frac{e^{-zu}}{u} \cos zu \, du - \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) \frac{\cos zu}{u} du$$

Das zweite der Integrale rechts lässt sich leicht unter endlicher Form darstellen. Es ist nämlich

$$\frac{1}{u} \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) = \sum_1^\infty \frac{2u}{u^2 + (2s\pi)^2}$$

also

$$-\int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) \frac{\cos zu}{u} du = -\sum_1^\infty \frac{1}{\pi s} \int^\infty \frac{\cos 2s\pi u}{1 + u^2} du$$

Wegen

$$\int_0^\infty \frac{\cos au}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}$$

erhält man für den Werth des Integrals

$$-\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{1}{s}\,e^{-2\pi s} = -\frac{\pi}{2}\,z + \log\left(e^{\pi z} - e^{-\pi z}\right)$$

Die Gleichung (11) wird hierdurch

$$(12)\qquad P = \tfrac{1}{2}\,(y+\tfrac{1}{2})\log(y^2+z^2) - y + z\,\operatorname{arctang}\frac{y}{z} + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right) e^{-yu}\cos zu\,du$$

Bezeichnet man den imaginären Theil von $\log \Pi\,(y+zi)$ in (10) durch Q, d. h.

$$Q = \int_0^\infty \left(ze^{-u} - \frac{e^{-yu}}{e^u-1}\sin zu\right)\frac{du}{u}$$

so ist

$$\frac{dQ}{dz} - \tfrac{1}{2}\left\{\log(y^2+z^2) + \frac{y}{y^2+z^2}\right\} = -\int_0^\infty e^{-yu}\cos zu\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)du$$

Man findet für Q auf ganz ähnliche Weise wie für P den Werth

$$(13)\quad Q = \tfrac{1}{2}z\log(y^2+z^2) - z + (y+\tfrac{1}{2})\operatorname{arctang}\frac{z}{y} - \int_0^\infty e^{-yu}\sin zu\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

Nimmt man nun in $P + Qi = \Pi\,(y+zi)$ für P, Q ihre Werthe aus (12) und (13) so wird

$$\log \Pi\,(y+zi) = \tfrac{1}{2}(y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y^2+z^2) + [(y+\tfrac{1}{2})i - z]\operatorname{arctong}\frac{z}{y} + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - (y+zi) + \int_0^\infty e^{-u(y+zi)}\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right\}\frac{du}{u}$$

Bemerkt man dass

$$\log(y+zi) = \tfrac{1}{2}\log(y^2+z^2) + i\,\operatorname{arctang}\frac{z}{y}$$

so lässt sich die obige Gleichung etwas einfacher schreiben

$$(14)\qquad \log \Pi\,(y+zi) - [(y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+zi) + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - (y+zi)]$$

$$= \int_0^\infty e^{-u(y+si)} \left\{ \tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right\} \frac{du}{u}$$

Es ist nun

$$\frac{1}{u}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2u^2}\left[u(e^u - 1) + 2u - 2(e^u - 1)\right] = \frac{\tfrac{1}{2}}{e^u - 1} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r u^r}{\Pi(r+2)}$$

und auch

$$\frac{1}{u}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2u^2}\left[u(1 - e^{-u}) + 2ue^{-u} - 2(1 - e^{-u})\right] = \frac{\tfrac{1}{2}}{e^u - 1} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \frac{r u^r}{\Pi(r+2)}$$

Bezeichnet man die linke Seite von (14) durch $\lambda(s)$ so erhält man, wenn man im Integral die eine oder andere der beiden letzteren Entwickelungen nimmt

$$\lambda(s) = \tfrac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r}{\Pi(r+2)} \int_0^\infty \frac{u^r e^{-u(y+si)}}{e^u - 1} du$$

$$\lambda(s) = \tfrac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cdot r}{\Pi(r+2)} \int_0^\infty \frac{u^r e^{-u(y+si)}}{1 - e^{-u}} du$$

In beiden Integralen entwickele man die Nenner $\frac{1}{e^u - 1}$, $\frac{1}{1 - e^{-u}}$ nach Potenzen von e^{-u}, wegen

$$\frac{1}{\Pi(r+2)} \int_0^\infty u^r e^{-(y+s+si)u} \cdot du = \frac{1}{(r+1)(r+2)} \frac{1}{(y+s+si)^{r+1}}$$

ergeben sich nun für

$$\lambda(s) = \log \Pi(y + si) - (y + \tfrac{1}{2} + si) \log (y + si) - \tfrac{1}{2} \log 2\pi + (y + si)$$

die beide folgenden Reihen

$$\log \Pi(y + si) = (y + \tfrac{1}{2} + si) \log (y + si) - (y + si) + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{1}{(y+1+si)^2} + \frac{1}{(y+2+si)^2} + \frac{1}{(y+3+si)^2} + \ldots \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{2}{3.4} \left\{ \frac{1}{(y+1+si)^5} + \frac{1}{(y+2+si)^5} + \frac{1}{(y+3+si)^5} + \ldots \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4.5}\left\{\frac{1}{(y+1+zi)^4}+\frac{1}{(y+2+zi)^4}+\frac{1}{(y+3+zi)^4}+\ldots\right\}$$
$$+\quad\ldots$$

16) $$\log \Pi(y+zi) = (y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+zi) - (y+zi) + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\left\{\frac{1}{(y+zi)^2}+\frac{1}{(y+1+zi)^2}+\ldots\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3.4}\left\{\frac{1}{(y+zi)^3}+\frac{1}{(y+1+zi)^3}+\ldots\right\}$$
$$+\quad\ldots$$

Für den Fall $z = o$ ist die Gleichung (15) zuerst von Binet (Journal de l'éc. polyt. Cah. 27. p. 256) und die Reihe (16) von Cauchy (Exercises d'Anal. T. II. p. 228) aufgestellt worden. Was die Convergenz dieser Reihen betrifft, so ergibt sich dieselbe leicht durch folgende Betrachtung. Es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{(y+s+zi)^{r+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-(y+zi)u}}{e^u-1}\,\frac{u^r}{\Pi(r)}\,du$$

und wenn man r alle positiven Werthe von 1 bis ∞ beilegt

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{(y+s+zi)^{r+1}} = \int_0^\infty e^{-u(y+zi)}\,du = \frac{1}{y+zi}$$

Nun ist aber diese Doppelsumme offenbar grösser wie die auf der rechten Seite in (15) vorkommende nämlich

$$\Sigma\ \Sigma\ \frac{r}{(r+1)(r+2)}\,\frac{1}{(y+s+zi)^{r+1}}$$

Bezeichnet man also durch θ einen positiven ächten Bruch, so führt die Gleichung (15) oder 16 auf

(17) $$\log \Pi(y+zi) = (y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+zi) - (y+zi) + \log\sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\theta}{y+zi}$$

Nimmt man hierin $z=o$ und $y=k$ wo k eine unendlich wachsende Zahl bezeichnet, so erhält man den bekannten Ausdruck von Stirling

(18 $$\log \Pi(k) = \log\sqrt{2\pi k} - k + k\log k$$

oder

(19 $$1 = \text{limes}\,\frac{1.2.3.\ldots\ldots k}{\sqrt{2\pi k}.e^{-k}.k^k} \quad \text{für } k = \infty$$

IV.

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (14) lässt sich noch in einer andern Reihe, wie die in (15) oder (16) gegebene entwickeln, ehe wir indessen hierzu übergehn, wird es gut sein zu zeigen, wie $\Pi(y+zi)$ durch ein unendliches Product ausgedrückt werden kann, da sich diese Darstellung unmittelbar an die beiden bemerkten Reihen anschliesst.

Wegen der Gleichung $\Pi(y+1+zi) = (y+1+zi)\,\Pi(y+zi)$ erhält man aus (15) wenn man dort $y+1$ statt y setzt und dann $\log \Pi(y+zi)$ abzieht

$$(y+\tfrac{1}{2}+zi)\log\left(1+\frac{1}{y+zi}\right)-1=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}\,\frac{1}{(y+1+zi)^2}+\frac{2}{3.4}\,\frac{1}{(y+1+zi)^3}+\frac{3}{4.5}\,\frac{1}{(y+1+zi)^4}+\ldots\ldots\right\}$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung (14) auch schreiben

$$\begin{aligned}\log \Pi(y+zi) = \log\sqrt{2\pi} - (y+zi) + (y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+zi)\\ + (y+\tfrac{3}{2}+zi)\log\left(1+\frac{1}{y+zi}\right) - 1\\ + (z+\tfrac{5}{2}+zi)\log\left(1+\frac{1}{y+1+zi}\right) - 1\\ + \ldots.\end{aligned}$$

Bezeichnet also k eine unendlich wachsende Zahl, so kann man setzen

$$\log \Pi(y+zi) = \log\sqrt{2\pi} - (y+zi) + (y+k+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+k+1+zi) - (k+1)$$
$$- \log(y+1+zi)(y+2+zi)\ldots(y+k+zi)$$

Es ist nun

$$(y+k+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+k+1+zi) = \tfrac{1}{2}(y+k)\log[z^2+(y+k+1)^2] + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+zi)\log[z^2+(y+k+1)^2]$$
$$+ (y+k+1)\,i\,\operatorname{arctang}\frac{z}{y+k+1} - (z+\tfrac{1}{2}i)\operatorname{arctang}\frac{z}{y+k+1}$$

Wegen des unendlich wachsenden k kann man einfach setzen $(y+k)\log(y+k+1)$ für $\frac{1}{2}(y+k)\log[z^2+(y+k+1)^2]$. Oder $(y+k)\log(y+k+1) = (y+k)\log\left(1+\frac{1}{y+k}\right) + y\log(y+k) + k\log\left(1+\frac{y}{k}\right) + k\log k$. Der erste Term reducirt sich auf $\log e = 1$, der zweite auf $y\log k$, der dritte auf $\log e^y = y$ so dass

$$\lim \tfrac{1}{2}(y+k)\log(z^2+(y+k+1)^2) = y+1+(k+y)\log k$$

Für $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+zi)\log(z^2+(y+k+1)^2)$ kann einfach $zi\log k + \log\sqrt{k}$ gesetzt werden.

$(y+k+1)\,i\operatorname{arctang}\frac{z}{y+1+k}$ reducirt sich auf zi und endlich $(z+\frac{1}{2}i)\operatorname{arctang}\frac{z}{y+k+1}$ wird Null.

Fasst man also alles zusammen so wird

$$\lim.\ (y+\tfrac{1}{2}+k+si)\log(y+1+si) = \log\left\{\sqrt{k}.\ k^{k}\, k^{y+si}\, e^{-y-1-si}\right\}$$

Der Ausdruck für $\log \Pi\,(y+si)$ lässt sich also auch schreiben

$$\log \Pi\,(y+si) = \log \frac{\sqrt{2\pi k}.\ k^{k}\, e^{-k}}{(y+1+si)\,(y+2+si)\ldots(y+k+si)} \cdot k^{y+si}$$

oder wegen (19), wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$(20) \qquad \Pi(y+si) = \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots k}{(s+1+si)\,(y+2+si)\ldots(y+k+si)}\, k^{y+si} \qquad (k=\infty)$$

Dieses ist eine analoge Definition zu der welche Gauss von $\Pi(y)$ gegeben hat. Diese Definition findet sich merkwürdiger Weise schon in einem Briefe vom 13. Oct. 1729 Euler's an Goldbach (Correspondance mathém. et. phys. de quelq. célébres géom. du XVIII siecle p. p. Fuss. Petersbourg 1847. t. I) Euler bemerkt dort ohne weitere Explicationen, dass der Werth von $\int_0^\infty u^m e^{-u}\, du$ sich ausdrücken lässt durch

$$\frac{1^m.2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m}.3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m}.4^m}{3+m} \cdot \ldots$$

was im Grunde genommen der von Gauss gegebene Ausdruck in etwas veränderter Schreibweise ist.

V.

Die in (15) und (16) gegebenen Reihen sind zwar convergent, die Annäherung gegen eine gewisse Gränze geschieht, selbst für ziemlich grosse Werthe des Moduls $\sqrt{(y^2+z^2)}$ von $y+si$, indessen sehr langsam. Dieses hat Binet bewogen seine Reihe

$$2\lambda(x) = \Sigma\Sigma \frac{r}{(r+1)\,(r+2)} \cdot \frac{1}{(x+s)^{r+1}}$$

durch geschickte Transformationen auf die Form

$$\frac{a'}{x+1} + \tfrac{1}{2}\frac{a''}{(x+1)\,(x+2)} + \tfrac{1}{3}\frac{a'''}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)} + \ldots.$$

zu bringen. Die hier auftretenden Coefficienten haben den Nachtheil, dass sie mühsam zu berechnen sind und mit dem Index unbegrenzt wachsen. Bezeichnet man das Product $(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots(x+n)$ durch p so wird

$$a^{(n)} = \frac{1}{2.3}p_0 + \frac{2}{3.4}\cdot\frac{1}{1}\left(\frac{dp}{dx}\right)_0 + \frac{3}{4.5}\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_0 + \ldots\ldots + \frac{n}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{\Pi(n)}\left(\frac{d^n p}{dx^n}\right)_0$$

Die angehängte Null bezeichnet, dass nach der Differentiation $x = o$ zu nehmen ist. Man überzeugt sich leicht, dass für ein nicht sehr grosses x die obige Reihe nur langsam convergirt und daher sehr schwer eine Prüfung gestattet. In seinem „Tractatus de interpolatione serierum" hat Sterling zuerst eine Reihe für die Summation der Logarithmen der natürlichen Zahlen aufgestellt mit welcher sich später Euler beschäftigt hat. Eine elementare Darstellung derselben findet sich in dem Capitel der Differentialrechnung, welches von der Differentiation der inexplicabelen Functionen handelt. Diese Reihe ist von späteren Geometern oft als divergent verworfen worden, Legendre hat eine beschränkte Anwendung derselben als einwurfsfrei nachgewiesen und gezeigt, dass wenn die Annäherung bei numerischen Rechnungen auch nur eine limitirte sein kann, dieselbe doch weit über die Genauigkeit der mathematischen Tafeln hinausgeht. Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (14) durch $\lambda(y+zi)$, so sieht man gleich, dass für grosse Werthe des Moduls $\sqrt{(y^2+z^2)}$ es sehr vortheilhaft wäre, das Integral links nach absteigenden Potenzen dieses Moduls zu entwickeln. Nun ist

$$\frac{1}{u}\left(\frac{1}{e^u-1}+\tfrac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)=2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{u^2+(2r\pi)^2}$$

oder wenn man rechts nach aufsteigenden Potenzen von u entwickelt

$$(21)\quad \frac{1}{u}\left(\frac{1}{e^u-1}-\frac{1}{u}-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{2}{(2\pi)^2}\Sigma\frac{1}{r^2}-\frac{2u^2}{(2\pi)^4}\Sigma\frac{1}{r^4}+\frac{2u^4}{(2\pi)^6}\Sigma\frac{1}{r^6}\cdots\cdots$$

Bekanntlich erhält man auch wenn man die linke Seite mittelst des Taylor'schen Satzes entwickelt

$$(2)\qquad \frac{1}{u}\left(\frac{1}{e^u-1}-\frac{1}{u}+\tfrac{1}{2}\right)=B_1-B_2u^2+B_3u^4-B_4u^6\cdots\cdots$$

wo B_1, B_2 .... die Bernoulli'schen Zahlen sind, so dass

$$B_n=\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\Sigma\frac{1}{r^{2n}}$$

Die Reihe (21)zeigt gleich, dass die Entwickelung nach Potenzen von u nur dann zulässig ist, wenn $u<2\pi$ und man sie nicht unbedingt in

$$(2)\quad \lambda(y+zi)=\int_0^\infty e^{-(y+zi)u}\left(\frac{1}{e^u-1}+\tfrac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}=\sum_1^\infty\frac{\frac{1}{2}r}{\Pi(r+2)}\int_0^\infty\frac{e^{-(y+zi)u}}{e^u-1}u^r\,du$$

anwenden darf, wo u alle möglichen positiven Werthe annimmt. Es wird immer erlaubt sein zu der Gleichung (23) auf beiden Seiten einen endlichen Ausdruck

$$(24)\quad M = -\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{y+zi} + \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{(y+zi)^3} - \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{(y+zi)^5} \cdots + (-1)^n \frac{Bn}{(2n-1)2n}\frac{1}{(y+zi)^{2n-1}}$$

zu addiren, wo $B_1, B_2 \ldots$ die obige Bedeutung haben. Den Ausdruck M bringen wir auf der rechten Seite unter die Form

$$M = \int_0^\infty e^{-(y+zi)u}\left\{-\frac{B_1}{\Pi(2)} + \frac{B_2}{\Pi(4)}u^2 - \frac{B_3}{\Pi(6)}u^4 \cdots + (-1)^n \frac{Bn}{\Pi(2n)}u^{2n-2}\right\}\frac{e^u - 1}{e^u - 1}\,du$$

Entwickelt man nun $e^u - 1$ im Zähler unter dem Integralzeichen nach Potenzen von u multiplicirt die beiden Reihen mit einander und addirt M zu $\lambda(z+zi)$, so wird

$$\lambda(y+zi) + M = \int_0^\infty \frac{e^{-(y+zi)u}}{e^u - 1}\, u^{2n}\left\{\mathfrak{G}_1 u + \mathfrak{G}_2 u^2 + \mathfrak{G}_3 u^3 + \ldots\right\} du$$

Wegen der bekannten Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen verschwinden unter dem Integralzeichen die $2n$ ersten Potenzen von u. Die Coefficienten $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2 \ldots$ sind durch folgende Gleichungen bestimmt

$$\mathfrak{G}_1 = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}$$

$$\mathfrak{G}_2 = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}\frac{1}{\Pi(2)}$$

$$\mathfrak{G}_3 = (-1)^n \left\{\frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}\frac{1}{\Pi(3)} - \frac{B_{n+2}}{\Pi(2n+4)}\right\}$$

$$\mathfrak{G}_4 = (-1)^n \left\{\frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}\frac{1}{\Pi(4)} - \frac{B_{n+2}}{\Pi(2n+4)}\frac{1}{\Pi(2)}\right\}$$

allgemein

$$\mathfrak{G}_{2m-1} = (-1)^n \left\{\frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}\frac{1}{\Pi(2m-1)} - \frac{B_{n+2}}{\Pi(2n+4)}\frac{1}{\Pi(2m-3)} \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{B_{n+m}}{\Pi(2n+2m)}\right\}$$

$$\mathfrak{G}_{2m} = (-1)^n \left\{\frac{B_{n+1}}{\Pi(2n+2)}\frac{1}{\Pi(2m)} - \frac{B_{n+2}}{\Pi(2n+4)}\frac{1}{\Pi(2m-2)} \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{B_{n+m}}{\Pi(2m+2n)}\frac{1}{\Pi(2)}\right\}$$

Es ist nun klar, dass hiernach

$$\theta_1 u + \theta_2 u^2 + \ldots\ldots < (-1)^n \frac{B_n+1}{\Pi(2n+2)} \left(u + \frac{u^2}{\Pi(2)} + \frac{u^3}{\Pi(3)} + \ldots\right) = (-1)^n \frac{B_n+1}{\Pi(2n+2)} (e^u - 1)$$

ist. Hierdurch erhält man

$$\lambda(y + zi) + M < (-1)^n \frac{B_n+1}{\Pi(2n+2)} \cdot \frac{\Pi(2n)}{(y+zi)} 2n + 1$$

Bezeichnet man den Modul $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ durch x, so wird derjenige Werth von n am vortheilhaftesten sein für welchen

$$\frac{B_n+1}{\Pi(2n+2)} \frac{\Pi(2n)}{x^{2n+1}} = \frac{2\,\Pi(2n)}{(2\pi)^{2n+2}} \frac{2n+1}{x} \sum_r \frac{1}{r^{2n+2}}$$

ein Minimum wird. In diesem Ausdruck kann man ohne Fehler, da x ziemlich gross angenommen wird, setzen $\Pi(2n) = 2\sqrt{\pi n}(2n)^{2n} e^{-2n}$ und $\Sigma \frac{1}{r^{2n+2}} = 1$ wodurch derselbe übergeht in

$$(25) \qquad \frac{\sqrt{\pi n}}{\pi^2 x} \left(\frac{n}{\pi x}\right)^{2n} e^{2n}$$

Der Term $\sqrt{n}$ influirt wenig auf das Minimum, so dass man nur das Minimum von $\left(\frac{n}{\pi x}\right)^{2n} e^{-2n}$ zu nehmen hat, welches für $n = \pi x$ stattfindet. Für diesen Werth wird der Ausdruck (25)

$$\frac{\pi\sqrt{x}}{e^{-2\pi x}}$$

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so wird

$$(20) \quad \log \Pi(y+zi) = \tfrac{1}{2} \log (y+zi) + (y+zi) \log (y+zi) + \log \sqrt{2\pi} - (y+zi) + \frac{B}{1.2} \frac{1}{y+zi} - \frac{B}{3.4} \frac{1}{(y+zi)^3} \ldots\ldots + (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)\,2n} \frac{1}{(y+zi)^{2n-1}}$$

$$n = \pi\sqrt{(y^2 + z^2)}$$

Der Fehler hierbei ist abgesehn vom Zeichen kleiner wie $\frac{e^{-2\pi\sqrt{(y^2+z^2)}}}{\pi^4 \sqrt[4]{(y^2 + zi)}}$

Um die Anwendbarkeit dieser Formel am besten zu zeigen wollen wir in einigen Beispielen für reelle Argumente dem letztern möglichst ungünstige Werthe geben. Es sei

$$\lambda(x) = \log \Pi(x) - (x + \tfrac{1}{2}) \log x + x - \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

$$= \frac{B}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{3.4}{B_1}\frac{1}{x^3} \cdots\cdots + (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}}$$

Nimmt man successive $x = 1; 2, 3$ so ergiebt sich die Berechnung von $\lambda(x)$ mittelst der Reihe auf folgende Weise

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
1stes Glied	+ 0,083333 3333	+ 0,04166 66666 6	+ 0,02777 77777 7777
2tes -	— 2777 7777	— 34 72222 2	— 10 28806 5843
	0555 5556	31 94444 4	67 48971 1934
3tes -	+ 0793 6507	+ 2 48015 8	+ 32660 5264
	1349 2063	4 42460 2	81631 7198
4tes -	— 595 2380	— 46502 9	— 02721 7105
	0753 9683	3 95957 3	78910 0093
5tes -		+ 16440 6	+ 427 6537
		4 12397 9	9337 6630
6tes -		— 09362 9	— 108 2449
		03035 0	229 4181
7tes -		+ 07902 1	+ 40 2067
		10937 1	69 6248
8tes -			— 20 5943
			49 0305
9tes -			+ 13 9108
			62 9413
10tes -			— 11 9872
			50 9541

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}69314\ 71805\ 59945 \\ \log 3 &= 1{,}09861\ 22886\ 67109 \\ \log \sqrt{\pi} &= 0{,}57236\ 49429\ 24700 \end{aligned}$$

Die Anzahl der zu berechnenden Glieder fällt für $x = 1, 2, 3$ respective zwischen 3 und 4, 6 und 7, 9 und 10 nimmt man also das arithmetische Mittel, welches sich aus den Resultaten für 3 und 4 Glieder etc. ergiebt, so erhält man folgende Rechnung

$$\lambda(1) = \log \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \qquad \lambda(2) = \log \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}} \qquad \lambda(3) = \log \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\frac{e}{3}\right)^3$$

arithmet. Mittel			
aus der Reihe	0,08105 158	0,04134 06986	0,02767 79256 9477
wahrer Werth	0,08106 146	0,04134 06959	0,02767 79256 8744
Differenz	— 0,00000 988	+ 0,00000 00027	+ 0,00000. 00000 0733

Diese Differenzen sind verhältnissmässig so äusserst gering, dass die practische Brauchbarkeit der obigen Reihe (26) von selbst einleuchtet. Die Anwendung der von Binet gegebenen Reihe selbst in ihrer transformirten Gestalt würde in den obigen Beispielen ein Werk der Unmöglichkeit sein. Obgleich n mit x wächst ist es ganz unnöthig viele Glieder der Reihe mitzunehmen, sobald es sich nur um eine gewisse Gränze handelt. Die 31 ersten Bernoullischen Zahlen hat Rothe in Crelle's Journal (XX. p. 11) zusammengestellt, von denen Euler schon die fünfzehn ersten berechnet hatte. Man findet Logarithmen von einer grossen Anzahl Decimalstellen in Koraleck's: Methode nouvelle pour calculer les logarith. des nomb. Paris 1851.

VI.

In den Elementen der Integralrechnung wird gezeigt, dass

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Setzt man t' statt t^2 im Integrale, so sieht man leicht, dass nach der Bezeichnung in (1) dasselbe gleich $\frac{1}{2}\,\Pi(-\frac{1}{2})$ ist, woraus folgt

$$\Pi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Nimmt man nun in (10) $s = 0$ $y = -\frac{1}{2}$ so wird auch

$$(27) \qquad \log \Pi(-\tfrac{1}{2}) = \log \sqrt{\pi} = \int_0^\infty \left(-\tfrac{1}{2} e^{-u} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}u} + 1}\right) \frac{du}{u}$$

Es ist bekanntlich

$$\left(\frac{e^{-u}}{1-e^{-2u}} - \frac{1}{2u}\right) \frac{1}{u} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{u^2 + (r\pi)^2}$$

Hieraus folgt

$$(27') \qquad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-u}}{1-e^{-2u}} - \frac{1}{2u}\right) \frac{du}{u} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{\frac{1}{2}u}}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u} = -\log \sqrt{2}$$

und wenn man diese Gleichung von (27) abzieht

$$(28) \qquad \log \sqrt{(2\pi)} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{u} - \tfrac{1}{2} e^{-u} - \frac{1}{\frac{u}{e-1}} \right\} \frac{du}{u}$$

Man setze nun zur Abkürzung:

$$B = \Pi(-\frac{1}{2n}) \; \Pi(-\frac{3}{2n}) \ldots . \; \Pi(-\frac{2n-1}{2n})$$

$$A = \Pi(-\frac{1}{n}) \; \Pi(-\frac{2}{n}) \ldots . \; \Pi(-\frac{n-1}{n})$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Mittelst der Gleichung (10) lässt sich $\log B$ auf folgende Art darstellen

$$(29) \quad \log B = \int_0^\infty \left\{ -\frac{n}{2} e^{-u} - \frac{n}{\frac{u}{e-1}} + \frac{e^{-\frac{1}{2n}u}}{1-e^{-\frac{1}{n}u}} \right\} \frac{du}{u}$$

Zieht man hiervon auf beiden Seiten $\frac{1}{2} n \log 2\pi$ nach der Gleichung (28) ab so bleibt

$$\log B - \frac{n}{2} \log 2\pi = \int_0^\infty \left\{ -\frac{n}{u} + \frac{e^{\frac{1}{2n}u}}{\frac{u}{e^n-1}} \right\} \frac{du}{u}$$

Setzt man im Integrale rechts u für $\frac{u}{n}$ so wird dasselbe gleich

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{\frac{1}{2}u}}{\frac{u}{e-1}} - \frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}$$

d. i. nach (27') gleich $-\log \sqrt{2}$ folglich

$$(30) \qquad \log B = \tfrac{1}{2} (n \log 2\pi - \log 2)$$

Der Ausdruck $\log A$ lässt sich darstellen durch

$$(31) \quad \log A = \int_0^\infty \left(-\frac{n-1}{2} e^{-u} - \frac{n}{\frac{u}{e-1}} + \frac{1}{\frac{1}{e^{n}u}-1} \right) \frac{du}{u}$$

Zieht man hiervon die Gleichung (29) ab, so ist

$$\log \frac{A}{B} = \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} e^{-u} - \frac{e^{-\frac{1}{2n}u}}{1+e^{-\frac{1}{2n}u}} \right) \frac{du}{u} = \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2} e^{-2nu} - \frac{1}{\frac{u}{e-1}} \right) \frac{du}{u}$$

Wegen

$$\log n = \int_0^\infty \frac{e^{-2u} - e^{-2nu}}{u}\, du$$

wird

$$\log \frac{A}{B} + \tfrac{1}{2}\log n = \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2}\, e^{-2u} + \frac{1}{\frac{u}{e-1}}\right)\frac{du}{u}$$

Das Integral rechts ist nach (27) gleich $\log \sqrt{\pi}$ also

$$\log \frac{A}{B} = \tfrac{1}{2}\log \frac{\pi}{n}$$

oder wenn man für A, B ihre Werthe einsetzt und von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$(32)\quad A = \Pi\left(-\frac{1}{n}\right)\Pi\left(-\frac{2}{n}\right)\Pi\left(-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\Pi\left(-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Man nehme nun den allgemeinen Ausdruck

$$(32^*)\quad \mathfrak{G} = \log \Pi(y + zi)\,\Pi\left(y + zi - \frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Pi\left(y + zi - \frac{n-1}{n}\right)$$

oder nach (10)

$$\log \mathfrak{G} = \int_0^\infty \left\{\left(ny + nzi - \frac{n-1}{2}\right) e^{-u} - \frac{n}{\frac{u}{e-1}} + \frac{e^{-(y+zi)u}}{\frac{u}{e^n - 1}}\right\}\frac{du}{u}$$

Hiervon die Gleichung (31) abgezogen

$$\log \mathfrak{G} - \log A = \int_0^\infty \left\{n\,(y + zi)\, e^{-u} - \frac{1 - e^{-(y+zi)u}}{\frac{1}{e^n - 1}}\right\}\frac{du}{u}$$

$$= \int_0^\infty \left\{n\,(y + zi)\, e^{-nu} - \frac{1 - e^{-n(y+zi)u}}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u}$$

Nun ist

$$\log \Pi(ny + nzi) = \int_0^\infty \left\{n\,(y + zi)\, e^{-u} - \frac{1 - e^{-n(y+zi)u}}{\frac{u}{e-1}}\right\}\frac{du}{u}$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Vorhergehenden so bleibt

$$\log 6 - \log A - \log \Pi(ny + nzi) = -n(y + zi) \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-nu}}{u} \frac{du}{u}$$
$$= -n(y + zi) \log n$$

Setzt man hierin für A und 6 ihre Werthe aus (32) und (32*) so wird

$$(33) \quad \frac{\Pi(y+zi)\,\Pi(y+zi-\frac{1}{n})\,\Pi(y+zi-\frac{2}{n}) \ldots \Pi(y+zi-\frac{n-1}{n})}{\Pi(ny + nzi)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} n^{-n(y+zi)}.$$

Dieses ist das bekannte Multiplicationstheorem von Gauss auf complexe Argumente ausgedehnt.

VII.

In der Gleichung (4) nämlich

$$\int_0^\infty e^{-uv} u^{y+zi} du = v^{-(y+1+zi)} \Pi(y + zi)$$

nehme man $y = 0$, also

$$v \int_0^\infty e^{-uv} u^{zi} du = v^{-zi} \Pi(zi)$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $e^{-v} dv$ und integrirt nach v zwischen den Grenzen o und ∞ so erhält man

$$\int_0^\infty \int_0^\infty v e^{-v(1+u)} u^{zi} du\, dv = \Pi(zi) \int_0^\infty v^{-zi} e^{-v} dv$$

Das Integral rechts ist gleich $\Pi(-zi)$. Integrirt man links zuerst nach v, so wird

$$(34) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(z \log u) + i \sin(z \log u)}{(1+u)^2} du = \Pi(zi)\, \Pi(-zi)$$

Setzt man nun im Integral $\log u = w$ so geht dasselbe über in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos zw + i \sin zw}{(e^w + 1)^2} e^w dw$$

Man beweist leicht, dass der imaginäre Theil verschwindet und der reelle gleich

$$2 \int_0^\infty \cos zw \frac{e^w}{(e^w + 1)^2} dw = 1 - 2z \int_0^\infty \frac{\sin zw}{e^w + 1} dw$$

ist. Entwickelt man $\frac{1}{e^{w}+1}$ nach Potenzen von e^{-w} so geht die Gleichung (35) wegen

$$\int_0^\infty e^{-sw} \sin zw \, dw = \frac{z}{s^2 + z^2}$$

über in

$$\Pi(zi)\ \Pi(-zi) = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s z^2}{s^2 + z^2} = \frac{2\pi z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$$

Eine Gleichung, die sich auch leicht ergibt aus

$$\Pi(zi)\ \Pi(-zi) = \frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{1}\right)\left(1+\frac{z^2}{4}\right)\left(1+\frac{z^2}{9}\right)\ldots\ldots}$$

Nehmen wir den allgemeinen Ausdruck $\Pi(y+zi)\ \Pi(-y-zi)$. Für den Logarithmen desselben hat man

$$\log \Pi(y+zi)\,\Pi(-y-zi) = \int_0^\infty \frac{\left(e^{yu}+e^{-yu}\right)\cos zu - 2}{e^{u}-1} \frac{du}{u} + i \int_0^\infty \frac{e^{yu} - e^{-yu}}{e^{u}-1} \frac{\sin zu}{u} du.$$

$$= A + Bi.$$

Zieht man von A

$$\log\ \Pi(zi)\ \Pi(-zi) = \int_0^\infty \frac{\cos zu - 2}{e^{u}-1} \frac{du}{u}$$

ab, so wird

$$A - \log \Pi(zi)\ \Pi(-zi) = \int_0^\infty \frac{e^{yu} + e^{-yu} - 2}{e^{u}-1} \cos zu \frac{du}{u}$$

Ist nun $y < 1$ so hat man bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{u} \frac{e^{uy} + e^{-uy} - 2}{e^{u}-1} = \frac{1 - e^{-uy}}{u} - 4 \sum_1^\infty \frac{1 - \cos 2s\pi y}{u^2 + (2s\pi)^2}$$

es wird folglich

$$A - \log \Pi(zi)\,\Pi(-zi) = \int_0^\infty \cos zu \frac{1 - e^{-uy}}{u} du - 4 \sum_1^\infty (1 - \cos 2s\pi y) \cdot \int_0^\infty \frac{\cos zu}{u^2 + (2s\pi)^2} du$$

Die rechte Seite ist, wie man leicht findet gleich

$$\tfrac{1}{2}\log(y^2+z^2)+\log\frac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{z}-\tfrac{1}{2}\log\left[e^{2\pi z}-2\cos 2\pi y+e^{-2\pi z}\right]$$

also da

$$\log\Pi(zi)\,\Pi(-zi)=\log 2\pi-\log\frac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{z}$$

so wird

$$A=\tfrac{1}{2}\log(y^2+z^2)+\log 2\pi-\tfrac{1}{2}\log\left(e^{2\pi z}-2\cos 2\pi y+e^{-2\pi z}\right)$$

In dem imaginären Theil der obigen Gleichung

$$B=\int_0^\infty\frac{e^{uy}-e^{-uy}}{e^u-1}\sin zu\,.\,\frac{du}{u}$$

nehme man

$$\frac{e^{uy}-e^{-uy}}{e^u-1}=e^{-uy}-4\sum_1^\infty\frac{2s\pi}{u^2+(2s\pi)^2}\sin 2s\pi y$$

es wird hierdurch, wie leicht folgt

$$B=\operatorname{arctang}\frac{z}{y}+\operatorname{arctang}\frac{\sin 2\pi y\,.\,e^{-2\pi z}}{1-e^{-2\pi z}\,.\cos 2\pi y}+\frac{\pi}{2}(2y-1)$$

oder

$$B=\operatorname{arctang}\frac{y}{z}-\operatorname{arctang}.\left(\frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\operatorname{tang}\pi y\right)$$

Man findet endlich

$$A+Bi=\log\Pi(y+zi)\,\Pi(-y-zi)=\log 2\pi+\tfrac{1}{2}\log(y^2+z^2)-\tfrac{1}{2}\log\left[\left(e^{\pi z}-e^{-\pi z}\right)\cos^2\pi y+\left(e^{\pi z}+e^{-\pi z}\right)\sin^2\pi y\right]-iy\operatorname{arctang}\frac{y}{z}+i\operatorname{arctang}\left(\frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\operatorname{tang}\pi y\right)$$

oder nach einigen einfachen Reductionen

$$\Pi(y+zi)\,\Pi(-y-zi)=\frac{\pi(y+zi)}{\sin\pi(y+zi)}\qquad(35)$$

Für $s = o$ erhält man die bekannte Gleichung $\Pi(y)\,\Pi(-y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y}$. Die Gültigkeit dieser Gleichung so wie die von (35) erstreckt sich von $o \leqq y < 1$. Setzt man in (33) $s = o$ und nimmt für y, n, bestimmte Zahlwerthe, so bemerkt man leicht wie sich diese Gleichung aus der obigen (35) für $s = o$ zusammensetzt. Es ist nicht schwer durch Combination dieser Gleichungen den bekannten Ausdruck

$$1 - 2q^n \cos 2nx\pi + q^{2n} = \prod_1^{n-1} \left\{1 - 2q \cos 2\left(x + \frac{r}{n}\right)\pi + q^2\right\}$$

abzuleiten.

VIII.

Die Function $\log \Pi(x)$ oder allgemeiner $\log \Pi(xa + p)$, wo a, p zwei Constanten sind, kann als die Ordinate einer Curve angesehn werden, wobei die nicht uninteressante Frage nach dem Inhalt dieser Curve zwischen zwei bestimmten Ordinaten entsteht. Dieses Problem, etwas weniger allgemein hat schon Prof. Raabe behandelt, indem er von dem Multiplicationstheorem (35) ausgeht. (Vergl. Crelle. Journal. XXVIII. 10 und XXV. 146). Die hierbei befolgte Methode n unendlich wachsen zu lassen ist sehr complicirt und erfordert specielle Betrachtungen, je nachdem p eine ganze, gebrochene oder incommensurable Zahl ist.

Nach den früher gegebenen Formeln ist:

$$\log \Pi(ax + p) = \int_0^\infty \left\{(ax + p)\, e^{-u} - \frac{1 - e^{-(ax+p)u}}{e^u - 1}\right\} \frac{du}{u}$$

Es sei nun a eine ganze Zahl. Man findet leicht

$$(36)\quad \int_0^1 \log \Pi(ax + p)\, dx = \int_0^\infty \left\{(p + \tfrac{1}{2}a)e^{-u} - \frac{1}{e^u - 1} + \frac{1 - e^{-au}}{au} \frac{e^{-pu}}{e^u - 1}\right\} \frac{du}{u}$$

Bekanntlich ist

$$(p+r)\log(p+r) - (p+r) = \int_0^\infty \left\{(p+r)\, e^{-u} - \frac{1 - e^{-(p+r)u}}{u}\right\} \frac{du}{u}$$

also wenn man r alle Werthe von $r = 1$ bis $r = a$ beilegt

$$\frac{1}{a}\log(1+p)^{1+p}(2+p)^{2+p} \ldots\ldots (a+p)^{a+p} - \frac{2p+a+1}{2} = \int_0^\infty \left(\frac{2p+a+1}{2}\, e^{-u} \frac{1}{u} + \frac{1 - e^{-au}}{au} \frac{e^{-pu}}{e^u - 1}\right) \frac{du}{u}$$

Zieht man diese Gleichung von (36) ab, so bleibt rechts

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \tfrac{1}{2} e^{-u} - \frac{1}{e^u - 1}\right) \frac{du}{u}$$

d. i. nach (28) $\log \sqrt{2\pi}$ folglich

$$\int_0^1 \log \Pi(ax+p)\, dx = \log\sqrt{2\pi} - \frac{2p+a+1}{2} + \frac{1}{a}\log(1+p)^{1+p}(2+p)^{2+p} \ldots\ldots (a+p)^{a+p}$$

Setzt man $\frac{x}{m}$ für x im Integral und $a = mn$, so wird

$$\int_0^m \log \Pi(nx+p)dx = m\log\sqrt{2\pi} \quad m\frac{2p+mn+1}{2} + \frac{1}{n}\log(1+p)^{1+p}(2+p)^{2+p} \ldots\ldots (p+mn)^{p+mn}$$

Für den besondern Fall, dass $n = 1$ $p = o$ ist wird

$$(37) \quad \log 1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots\ldots m^m = \int_0^m \log \Pi(x)\, dx - m\log\sqrt{\pi} + \frac{m(m+1)}{2}$$

Diese Gleichung gilt für ganze m. Nimmt man die von Gauss gegebene Definition

$$\Pi(x) = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots k}{(x+1)\ (x+2)\ldots\ldots(x+k)}\, k^x \quad (k = \infty)$$

so folgt

$$\int_0^m \log \Pi(x)\, dx = m\log \Pi(m) + \log \frac{1^1 . 2^2 \ldots\ldots (m+k)^k}{(m+1)^1\ (m+2)^2 \ldots\ldots (m+k)^k}\, e^{km}\, k^{-\frac{m^2}{2}}$$

Durch Vergleich mit (37) wird also

$$1^1 . 2^2 \ldots\ldots m^m = \left\{\frac{\Pi(m)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{m+1}{2}}\right\}^m \cdot \frac{1^1 . 2^2 \ldots\ldots k^k}{(m+1)^1 (m+2)^2 \ldots\ldots (m+k)^k}\, e^{km}\, k^{-\frac{m^2}{2}} \quad (k = \infty)$$

Der Ausdruck rechts kann als die Definition einer neuen Function $f(m)$ von m angesehn werden, welcher für ganze m den Ausdruck der linken Seite gibt und für den die allgemeine Gleichung gibt $f(m+1) = (m+1)^{m+1} . f(m)$. Da die Untersuchung dieser Function keine Schwierigkeiten darbietet, so übergehn wir dieselbe, und bemerken nur noch den Werth des folgenden $n$fachen Integrals:

$$\Pi(n) \int_0^1 \ldots\ldots \int_0^1 \log \Pi(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + p)\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n = (p+n)^n \log (p+n)$$

$$- (n-1)\ (p+n-1)^n \log (p+n-1)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} (p+n-2)^n \log (p+n-2) + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} (p+1) \log (p+1)$$

$$-\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\left\{(p+n)^n-(n-1)(p+n-1)^n+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2}(p+n-2)^n\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}(p+1)^n\right\}$$

IX.

Die in VII gebrauchte Gleichung

$$\frac{e^{(1-y)u}-e^{yu}}{e^u-1}=4\,\Sigma\,\frac{2s\pi}{u^2+(2s\pi)^2}\sin 2s\pi y$$

lässt sich zu einer eleganten Darstellung von $\log \Pi(y-1)$ anwenden, wenn y zwischen den Gränzen o und 1 liegt. Setzt man in

$$\log\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(-y)}=\int_0^\infty\left\{(2y-1)\,e^{-u}+\frac{e^{(1-y)u}-e^{yu}}{e^u-1}\right\}\frac{du}{u}$$

für $\dfrac{e^{(1-y)u}-e^{yu}}{e^u-1}$ die obige Reihe und $2y-1=-\dfrac{2}{\pi}\Sigma\dfrac{\sin 2s\pi y}{s}$

so wird

$$\log\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(-y)}=2\Sigma\sin 2s\pi y\int_0^\infty\left\{\frac{4s\pi}{u^2+(2s\pi)^2}-\frac{1}{\pi s}e^{-u}\right\}\frac{du}{u}$$

oder wenn man im Integral $2s\pi u$ für u setzt

$$\log\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(-y)}=\frac{2}{\pi}\Sigma\frac{\sin 2s\pi y}{s}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1+u^2}-e^{-2s\pi u}\right\}\frac{du}{u}$$

Das Integral rechts bezeichne man durch J also

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1+u^2}-e^{-2s\pi u}\right\}\frac{du}{u}$$

Man findet leicht, dass

$$\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+u}\right\}\frac{du}{u}=o$$

ist, setzt man nämlich $\dfrac{1}{u}$ für u so ändert der Ausdruck rechts nur seine Zeichen. Hierdurch lässt sich J auch schreiben

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1+u}-e^{-2s\pi u}\right\}\frac{du}{u}$$

d. i. wegen

$$\psi(o) = \int_0^\infty \left\{ e^{-u} - \frac{1}{1+u} \right\} \frac{du}{u} \quad \log 2s\pi = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-2s\pi u}}{u}\, du$$

$$J = \log 2s\pi - \psi(o)$$

Man hat also

$$\log \frac{\Pi(y-1)}{\Pi(-y)} = \frac{2}{\pi} (\log 2\pi - \psi(o)) \Sigma \frac{\sin 2s\pi y}{s} + \frac{2}{\pi} \Sigma \frac{\sin 2s\pi y}{s} \log s$$

und wenn man hierzu

$$\log \Pi(y-1)\, \Pi(-y) = \log \frac{\pi}{\sin \pi y}$$

addirt so wird

$$\log \Pi(y-1) = \frac{1-2y}{2} (\psi(o) - \log 2\pi) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi y} + \frac{1}{\pi} \Sigma \frac{\sin 2s\pi y}{s} \log s$$

Aus dieser Gleichung lässt sich noch leicht eine bemerkenswerthe Summe ableiten. Setzt man successive $\frac{y}{2}$ und $\frac{y-1}{2}$ für y und addirt beide Resultate so folgt wegen

$$\Pi\left(\frac{1-y}{2} - 1\right) \Pi\left(\frac{y}{2} - 1\right) = \frac{2\pi^2}{\sin \pi y} \frac{1}{\Pi(-\frac{y}{2})\, \Pi(\frac{y-1}{2})}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \Sigma \frac{\sin (2s-1)\, \pi z}{2s-1} \log (2s-1) = -\tfrac{1}{2} \log \Pi\left(\frac{y-1}{2}\right) \Pi\left(-\frac{y}{2}\right) + \tfrac{1}{4} [\log \pi - \log \sin \pi y + \psi(o)]$$

oder wenn man $\frac{1}{2} - y$ für y setzt

$$\frac{\cos \pi y}{1} \log 1 - \frac{\cos 3\pi y}{3} \log 3 + \frac{\cos 5\pi y}{5} \log 5 - \frac{\cos 7\pi y}{7} \log 7 \ldots\ldots$$

$$= -\frac{\pi}{2} \log \Pi(-\tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4})\, \Pi(\tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4}) + \frac{\pi}{4} (\log \pi - \log \cos \pi z + \psi(o)).$$

Dieses ist die einzige Reihe von der Form $\Sigma(-1)^{m-1} \frac{\cos m\pi y}{m} \log m$ deren Summe sich auf $\log \Pi(y)$ und $\psi(o)$ zurückführen lässt.

Wenn das Argument y imaginär oder complex ist so lassen sich ähnliche Reihen wie die für $\log \Pi(y-1)$ gegebene aufstellen, da dieselben indessen, um convergent zu sein, in einer sehr complicirten und uneleganten Form erscheinen so unterlassen wir ihre Aufstellung.

X.

Man durchschaut leicht, dass die Summen der Reihen von der Form $\Sigma \cos s\alpha \log (1 \pm \frac{x}{s})$ $\Sigma \sin s\alpha \log (1 \pm \frac{x}{s})$ auf eine bestimmte Anzahl der Functionen $\log \Pi(x)$ zurückgeführt werden können. Diese Summation ist dann möglich wenn α zu π in einem rationalen Verhältniss steht — ein Fall, der wohl für alle numerischen Rechnungen ausreicht. Um die Formeln nicht zu sehr zu compliciren setzen wir x reell voraus, obgleich die nachstehenden Summen auch für complexe x gelten.

Es ist bekanntlich

$$\sum_1^{n-1}(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n} = \tfrac{1}{2}\left\{1+(-1)^{n+q}\right\} \qquad \sum_1^{n-1}(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n} = \tfrac{1}{2}\left\{1-(-1)^{n+q}\right\}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{2n}$$

$$\sum_1^{n-1}(-1)^{r-1} r\sin\frac{rq\pi}{n} = \tfrac{1}{2}\, n\,(-1)^{n+q+1}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{2n}$$

$$\sum_1^{n-1}(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}\, e^{-\frac{ru}{n}} = e^{-\frac{u}{n}}\sin\frac{q\pi}{n}\,\frac{1+(-1)^{n+q+1}e^{-u}}{1+2e^{-\frac{u}{n}}\cos\frac{q\pi}{n}+e^{-2\frac{u}{n}}}$$

$$\sum_1^{n-1}(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n}\, e^{-\frac{ru}{n}} = 1-\left\{1-(-1)^{n+q}e^{-u}\right\}\frac{1+e^{-\frac{u}{n}}\cos\frac{q\pi}{n}}{1+2e^{-\frac{u}{n}}\cos\frac{q\pi}{n}+e^{-2\frac{u}{n}}}$$

Wir haben diese Formeln zum einfacheren Verständniss der folgenden Summen aufgestellt. Je nachdem $n+q$ grade oder ungrade ist, sind zwei Fälle zu unterscheiden, die wir successive betrachten wollen. Um Wiederholungen zu vermeiden, soll r die Summation von 1 bis $n-1$ und s die von 1 bis ∞ bezeichnen.

Erster Fall $n+q$ ungrade.

Multiplicirt man

$$\log\frac{\Pi(\frac{x+r}{2n}-\frac{1}{2})\,\Pi(\frac{r}{2n}-1)}{\Pi(\frac{x+r}{2n}-1)\,\Pi(\frac{r}{2n}-\frac{1}{2})} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\frac{xu}{2n}}}{u}\,\frac{e^{-\frac{xu}{2n}}}{e^{\frac{1}{2}u}+1}\,e^{\frac{1}{2}u}\,du$$

auf beiden Seiten mit $(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}$ und legt r alle ganzzahligen Werthe von 1 bis $n-1$ bei so wird die Summe unter dem Integralzeichen

$$\sin\frac{q\pi}{n}\cdot\int_0^\infty \frac{1-e^{-\frac{u}{2u}}}{u}\,\frac{e^{-\frac{u}{2n}}}{1+2e^{-\frac{u}{2u}}\cos\frac{q\pi}{n}+e^{-\frac{u}{n}}}\,du$$

oder wenn man nu für u setzt und berücksichtigt das allgemein

$$\frac{e^{-u}\sin\alpha}{1+2e^{-u}\cos\alpha+e^{-2u}} = \Sigma(-1)^{s-1}e^{-su}\sin s\alpha$$

so hat man

$$\Sigma\int_0^\infty \frac{1-e^{-xu}}{u}e^{-nu}(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\,du = \Sigma(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\log\left(1+\frac{x}{s}\right)$$

folglich

$$\Sigma(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}\log\frac{\Pi\frac{x+r}{2n}-\frac{1}{2})\,\Pi(\frac{r}{2n}-1)}{\Pi(\frac{x+r}{2n}-1)\,\Pi(\frac{r}{2n}-\frac{1}{2})} = \Sigma(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\log\left(1+\frac{x}{s}\right)$$

Setzt man hierin $-x$ für x und zieht die neue Reihe von der vorstehenden ab, so wird wie man leicht findet

$$\Sigma(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}\log\operatorname{cotang}.\pi\frac{r-x}{2n} = \Sigma(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\log\frac{s+x}{s-x}$$

wo natürlich $x<1$ sein muss. Ganz auf dieselbe Weise folgt

$$\log\frac{\Pi(\frac{x}{2n})\,\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{x}{2n}-\frac{1}{2})}+\Sigma(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n}\log\frac{\Pi(\frac{r+x}{2n}-\frac{1}{2})\,\Pi(\frac{r}{2n}-1)}{\Pi(\frac{r+x}{2n}-1)\,\Pi(\frac{r}{2n}-1)}$$
$$= \Sigma(-1)^{s-1}\cos\frac{sq\pi}{n}\log\left(1+\frac{x}{s}\right).$$

Setzt man hierin wieder $-x$ für x und addirt die neue Reihe zu der vorstehenden, so wird:

$$\log\frac{\pi z}{2n}-\log\operatorname{tang}\frac{\pi z}{2n}+\Sigma(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n}\log\frac{\operatorname{tang}\frac{r-x}{2n}\pi}{\operatorname{tang}\frac{r\pi}{2n}}$$
$$= \Sigma(-1)^{s-1}\cos\frac{sq\pi}{n}\log\left(1-\frac{x^2}{s^2}\right)$$

Zweiter Fall $n + q$ graed.

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}\,\log\frac{\Pi(\frac{x-r}{n})\,\Pi(\frac{r}{n}-1)}{\Pi(\frac{r+x}{n}-1)\,\Pi(-\frac{r}{n})}=\Sigma(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\log\,(1+\frac{x}{s}).$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma(-1)^{r-1}\sin\frac{rq\pi}{n}\,\log\frac{\sin\pi\,\frac{r+x}{n}}{\sin\pi\,\frac{r-x}{n}}=\Sigma(-1)^{s-1}\sin\frac{sq\pi}{n}\,\log\frac{s+x}{s\quad x}$$

$$\log\Pi(\tfrac{x}{n})+\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n}\,\log\frac{\Pi(\frac{r}{n}-1)\,\Pi(-\frac{r}{n})}{\Pi(\frac{x+r}{n}-1)\,\Pi(\frac{x-r}{n})}=\Sigma(-1^{s-1}\cos\frac{sq\pi}{n}\log(1+\frac{x}{s}).$$

$$\log\frac{\frac{\pi x}{n}}{\sin\frac{\pi x}{n}}+\tfrac{1}{2}\,\Sigma(-1)^{r-1}\cos\frac{rq\pi}{n}\,\log\frac{\sin\pi\,\frac{r+x}{n}}{\sin\frac{\pi r}{n}}\cdot\frac{\sin\pi\,\frac{r-x}{n}}{\sin\frac{\pi r}{n}}$$

$$=\Sigma\,(-1)^{s-1}\,\cos\frac{sq\pi}{n}\,\log\,(1-\frac{x^2}{s^2}).$$

Die vorstehenden Reihen lassen sich noch weiter combiniren mit den folgenden

$$\Sigma(-1)^{s-1}\sin s\pi\alpha\,\log\frac{s+x}{s-x}=\Sigma\left\{\frac{\sin\,(2s-1-\alpha)\,\pi x}{2s-1-\alpha}-\frac{\sin\,(2s-1+\alpha)\,\pi x}{2s-1+\alpha}\right\}$$

$$\Sigma(-1)^{s-1}\cos s\pi\alpha\log(1-\frac{x^2}{s^2})=\Sigma\,\left\{\frac{\cos\,(2s-1-\alpha)\,\pi x}{2s-1-\alpha}+\frac{\cos\,(2s-1+\alpha)\pi x}{2s-1+\alpha}\right\}+\log 2\pi x$$

$$+\,\tfrac{1}{2}\,[\psi(-\frac{1+\alpha}{2})\,+\,\psi\,(-\,\frac{1-\alpha}{2})\,-\,2\psi(o)]$$

wo $x<1$ $\alpha<1$. Da indessen der Beweis dieser Reihen für den vorliegenden Zweck etwas weitläufig wäre so begnügen wir uns mit ihrer Angabe.

Anmerkungen.

Wir wollen noch einige merkwürdigen Ausdrücke für $\log \Pi(x)$ und $\psi(x)$ zusammenstellen, die für manche Zwecke nützlich sein können.

Es ist

$$\psi(x+n)-\psi(x) = \int_0^\infty e^{-xu} \frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}} e^{-u}\, du = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n}$$

oder $e^{-u} = w$ gesetzt verwandelt das Integral in

$$\int_0^1 w^x \frac{1-w^n}{1-w}\, dw$$

und wenn man $1-w$ für w nimmt

$$\int_0^1 (1-w)^x \frac{1-(1-w)^n}{w}\, dw$$

Da nun $1-(1-w)^n = na - \frac{n(n-1)}{1.2} w^2 + \ldots + (-1)^n w^n$ so erhält man wegen

$$\int_0^1 (1-w)^x w^p\, dw = \frac{1.2\ldots.p}{(x+1)(x+2)\ldots(x+p+1)}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n} = \frac{n}{x+1} - \tfrac{1}{2}\frac{n(n-1)}{(x+1)(x+2)} + \tfrac{1}{3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots.1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

Setzt man in

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \int_0^\infty e^{-v} v^x \log v\, dv$$

$$\log v = \int_0^\infty \frac{\cos u - \cos vu}{u}\, du$$

und integrirt zuerst nach v, so wird

$$\psi(x) = \int_0^\infty \left\{ \cos u - \frac{\cos(x+1)\arctang u}{(1+u^2)^{\frac{x+1}{2}}} \right\} \frac{du}{u}$$

also

$$\psi(x+n)-\psi(x) = \int_0^\infty \left\{\cos(x+1)\arctang u - \frac{\cos(x+n+1)\arctang u}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}}}\right\} \frac{du}{u\,(1+u^2)^{\frac{x+1}{2}}}$$

oder $\arctang u = \theta$ gesetzt

$$\psi(x+n) - \psi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x+1)\,\theta - \cos(n+x+1)\,\theta \cos^n\theta)\, \frac{\operatorname{coc}^x \theta\, d\theta}{\sin\theta}$$

Für $n = 1$ folgt hieraus unmittelbar die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{x+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+2)\,\theta \,.\, (\cos\theta)^x\, d\theta$$

Wegen $\psi(-x) - \psi(x-1) = \pi \cot. \pi x$ wird

$$\pi \cot. \pi x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\cos x\theta \,.\, (\cos\theta)^{x-1} - \cos(x-1)\,\theta \,.\, (\cos\theta)^{-x}\right\} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

also für $x = \frac{1}{4}$

$$\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{1}{4}\theta - \cos\frac{3}{4}\theta \,.\, \sqrt{\cos\theta}}{\sin\theta \,.\, (\cos\theta)^{\frac{3}{4}}}\, d\theta$$

eine Gleichung, die nicht leicht direct zu beweisen sein möchte.

Der Gleichung (14) kann man leicht eine etwas veränderte Form geben. Bezeichnet man die linke Seite durch $\lambda(y+zi)$ nämlich

$$\lambda(y+zi) = \log \Pi(y+zi) - (y+\tfrac{1}{2}+zi)\log(y+zi) + (y+zi) - \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

so ist

$$\lambda(y+zi) = 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-yu}\cos zu}{u^2+(2s\pi)^2}\, du - 2\sum \int_0^\infty \frac{e^{-yu}\sin zu}{u^2+(2s\pi)^2}\, du$$

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{u^2+(2s\pi)^2} = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-2s\pi v}\sin uv\, dv$$

also

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-yu}\cos zu}{u^2+(2s\pi)^2}\, du = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-yu}\, e^{-2s\pi v}\, \frac{\sin(v+z)\,u + \sin(v-z)\,u}{u}\, du\, dv$$

Integrirt man rechts zuerst nach u, so wird

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-yu}\cos zu}{u^2+(2s\pi)^2}\,du = \int_0^\infty e^{-2s\pi v}\left\{\text{arctang}\,\frac{v+z}{y}+\text{arctang}\,\frac{v-z}{y}\right\}dv$$

Ebenso folgt

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-yu}\sin zu}{u^2+(2s\pi)^2}\,du = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2s\pi v}\log\frac{y^2+(v+iz)^2}{y^2+(v-z)^2}\,dv$$

Mittelst dieser beiden Gleichungen folgt leicht:

$$\lambda(y+zi) = i\int_0^\infty \frac{\log\left(\frac{y-(v-z)\,i}{y+(v+z)\,i}\right)}{e^{2\pi v}-1}\,dv$$

Für $z = o$ ergibt sich der zuerst von Binet aufgestellte Ausdruck

$$\lambda(z) = 2\int_0^\infty \frac{\text{arctang}\,\frac{v}{y}}{e^{2\pi v}-1}\,dv.$$